



Zakład Metrologii i Systemów Pomiarowych
Politechnika Poznańska

ul. Jana Pawła II 24 60-965 POZNAŃ
(budynek Centrum Mechatroniki, Biomechaniki i Nanoinżynierii)
www.zmisp.mt.put.poznan.pl tel. +48 61 665 35 70 fax +48 61 665 35 95

BADANIE POWTARZALNOŚCI PRZYRZĄDU POMIAROWEGO

POZNAŃ III.2017

© ZMiSP

1. CEL I ZAKRES ĆWICZENIA

Celem ćwiczenia jest poznanie sposobów oceny dokładności pomiaru na przyrządzie pomiarowym poprzez ocenę wariancji. Sprawdzenie odbywa się dla więcej niż dwóch populacji. Do oceny jednorodności wariancji wykorzystano test Bartletta. Ćwiczenie obejmuje dokonanie bezpośrednich pomiarów na przyrządzie i w oparciu o otrzymane wyniki określenie z zadanym poziomem ufności średniego błędu kwadratowego przyrządu pomiarowego oraz jednorodności pomiarów dla różnych zakresów.

2. ZAKRES OBOWIĄZUJĄCEGO MATERIAŁU

- definicja niepewności pomiaru, [1]
- przedział ufności dla odchylenia standardowego, [2,3]
- test jednorodności wielu wariancji Bartletta, [2,3]

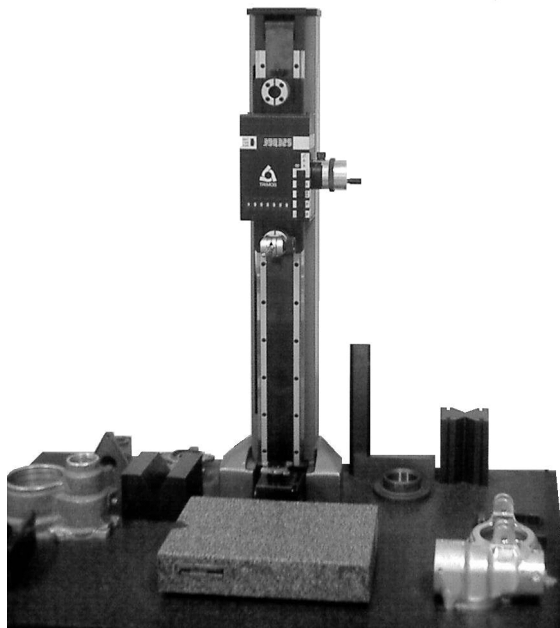
3. LITERATURA

1. Jakubiec W.; Malinowski J.: Metrologia Wielkości Geometrycznych. WNT Warszawa 1993 - 2004. (rozdział: Błędy pomiarów).
2. Greń J.: Statystyka Matematyczna Modele i Zadania. PWN Warszawa 1968 - 1982. (rozdział: Estymacja przedziałowa parametrów – Przedział ufności dla wariancji; Parametryczne testy istotności - Test jednorodności wielu wariancji).
3. Bobrowski D.; Łybacka K.: Wybrane Metody Wnioskowania Statystycznego. WPP 1988 – 2006. (rozdział: Teoria estymacji – Estymacja przedziałowa; Teoria weryfikacji hipotez statystycznych – Testy parametryczne – Testy dotyczące wariancji).

4. OPIS STANOWISKA

Stanowisko pomiarowe składa się z następujących przyrządów i elementów pomiarowych:

- wysokościomierz Trimos;
- płytki wzorcowe;
- mała płyta pomiarowa.



5. ZADANIA DO WYKONANIA

Ćwiczenie obejmuje wykonanie wielokrotnych pomiarów długości płytek wzorcowych. Następnie z zadanyim poziomem należy obliczyć przedziały ufności dla odchylenia standardowego wyznaczenia długości płytek. Ostatnim etapem jest porównanie za pomocą testu Bartletta jednorodności wariancji dla pomiarów różnych długości.

Pomiar długości płytek wzorcowych i sprawdzenie jednorodności wariancji dla pomiarów różnych długości.

Czynności:

- ustawić obok siebie k płytek wzorcowych na małej płycie pomiarowej ($k=3÷5$);
- ustawić końcówkę pomiarową na styk z powierzchnią małej płyty pomiarowej i wyzerować wskazanie wysokościomierza;
- zmierzyć 30 razy poziom zerowy (x_{oi}) i górne powierzchnie płytek wzorcowych (x_{ji}) oraz obliczyć długości poszczególnych płytek wzorcowych l_{ji} (1);

$$l_{ji} = (x_{ji} - x_{oi});$$

gdzie: $i = 1..30;$ (1)
 $j = 1..k$

- obliczyć wartości średnie (2), odchylenia średnie (3) i przedziały ufności odchyłeń standardowych σ_j dla długości wszystkich płytek wzorcowych ($j = 1..k$);

$$\bar{l}_j = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} l_{ji} \quad (2)$$

$$\hat{\sigma}_j = \sqrt{\frac{1}{n_j - 1} \sum_{i=1}^{n_j} (l_{ji} - \bar{l}_j)^2} \quad (3)$$

$$P \left(\sqrt{\frac{(n_j - 1)\hat{\sigma}_j^2}{\chi_{r;1-\frac{\alpha}{2}}^2}} < \sigma_j < \sqrt{\frac{(n_j - 1)\hat{\sigma}_j^2}{\chi_{r;\frac{\alpha}{2}}^2}} \right) = 1 - \alpha \quad (4)$$

gdzie:

- $i = 1..n_j$ – liczność próbki;
- $j = 1..k$ – liczba próbek;
- $r = n_j - 1$ – liczba stopni swobody.

- sprawdzić testem Bartletta jednorodność wariancji wyznaczenia długości płytek wzorcowych;

Założenia:

- populacje generalne mają rozkłady normalne;
- μ_j, σ_j – nieznane;
- k prób prostych o liczebnościach n_j ;
- $m = \sum_{j=1}^k n_j$

Hipotezy:

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \dots = \sigma_k^2$$

H_1 : nie wszystkie wariancje są równe.

Statystyka:

$$M = -\frac{1}{c} \sum_{i=1}^k (n_j - 1) \ln \frac{\hat{s}_j^2}{s^2} \quad (5)$$

gdzie:

$$c = 1 + \frac{1}{3(k-1)} \left[\sum_{j=1}^k \left(\frac{1}{n_j - 1} \right) - \frac{1}{m - k} \right] \quad (6)$$

$$\hat{s}_j^2 = \frac{1}{n_j - 1} \sum_{i=1}^{n_j} (l_{ji} - \bar{l}_j)^2 \quad (7)$$

$$s^2 = \frac{1}{m - k} \sum_{j=1}^k (n_j - 1) \hat{s}_j^2 \quad (8)$$

ma rozkład asymptotyczny χ^2 z $r = k - 1$ stopniami swobody.

Obszar krytyczny to $R_\alpha = (\chi_{r;1-\alpha}^2; \infty)$

Jeżeli licznosci próbek n_j są takie same i równe n to wartości M , c i s^2 przyjmują prostszą postać:

$$M = \frac{n-1}{c} \left[k \ln s^2 - \sum_{i=1}^k \ln \hat{s}_j^2 \right] \quad (9)$$

$$c = 1 + \frac{k+1}{3k(n-1)} \quad (10)$$

$$s^2 = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \hat{s}_j^2 \quad (11)$$

Jeżeli M nie mieści się w obszarze krytycznym, to nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0 o równości wariancji.

6. PRZYKŁAD OPRACOWANIA WYNIKÓW POMIARÓW

Zmierzone długości płytek wzorcowych wynoszą:

Lp	l_{1i}	l_{2i}	l_{3i}	l_{4i}
1	19,995	39,994	59,919	80,006
2	19,999	39,995	59,925	80,004
3	19,998	39,997	59,923	80,006
4	19,998	39,994	59,920	80,003
5	19,996	39,992	59,923	80,003
6	19,998	39,998	59,926	80,003
7	19,996	39,992	59,922	80,001
8	19,992	39,994	59,922	80,003
9	19,993	39,994	59,925	80,002
10	19,992	39,994	59,921	79,998
11	19,993	39,995	59,921	80,001
12	19,997	39,998	59,926	80,006
13	19,995	39,996	59,922	80,004
14	19,997	39,995	59,918	80,002
15	19,996	39,997	59,923	80,005
16	19,996	39,997	59,922	80,006
17	19,987	39,987	59,913	79,998
18	20,000	39,996	59,920	80,004
19	19,996	39,993	59,919	80,003
20	19,996	39,990	59,921	80,002
21	19,997	39,995	59,919	80,003
22	19,999	39,997	59,924	80,004
23	20,001	39,995	59,923	80,004
24	20,003	39,998	59,924	80,005
25	19,997	39,995	59,921	80,003

Otrzymano następujące wartości średnie (2) i odchylenia średnie (3):

$$\begin{aligned} \bar{l}_1 &= 19,9963; & \hat{s}_1 &= 0,00326 \\ \bar{l}_2 &= 39,9947; & \hat{s}_2 &= 0,00257 \\ \bar{l}_3 &= 59,9217; & \hat{s}_3 &= 0,00285 \\ \bar{l}_4 &= 80,0032; & \hat{s}_4 &= 0,00213 \end{aligned}$$

Wartość kwantyli rozkładu χ^2 na poziomie ufności $(1 - \alpha) = 90\%$

($\alpha/2 = 0,05$ i $1 - \alpha/2 = 0,95$ oraz liczby stopni swobody $r=n-1 = 24$) wynoszą:

$$\chi_{r;1-\frac{\alpha}{2}}^2 = 36,415 \qquad \chi_{r;\frac{\alpha}{2}}^2 = 13,848$$

Model przedziału ufności:

$$P\left(\sqrt{\frac{(n_j - 1)\hat{s}_j^2}{\chi_{r;1-\frac{\alpha}{2}}^2}} < \sigma_j < \sqrt{\frac{(n_j - 1)\hat{s}_j^2}{\chi_{r;\frac{\alpha}{2}}^2}}\right) = 1 - \alpha$$

Wartości granic przedziałów ufności wynoszą:

$$P(0,00265 < \sigma_1 < 0,00429) = 0,90$$

$$P(0,00209 < \sigma_2 < 0,00339) = 0,90$$

$$P(0,00232 < \sigma_3 < 0,00376) = 0,90$$

$$P(0,00173 < \sigma_4 < 0,00281) = 0,90$$

Parametry c i s^2 z testu Bartletta dla $k = 4$; $n_j = 25$ oraz $m = n \cdot k = 100$ wynoszą:

$$c = 1 + \frac{1}{3(k-1)} \left[\sum_{j=1}^k \left(\frac{1}{n_j - 1} \right) - \frac{1}{m - k} \right] = 1,017361$$

$$s^2 = \frac{1}{m - k} \sum_{j=1}^k (n_j - 1) \hat{s}_j^2 = 0,0000074883$$

Obliczenie wyrażeń użytych w statystyce M :

Lp	n_j	\hat{s}_j^2	$\frac{\hat{s}_j^2}{s^2}$	$\ln \frac{\hat{s}_j^2}{s^2}$	$(n_j - 1) \ln \frac{\hat{s}_j^2}{s^2}$
1	30	0,0000106267	1,4191	0,3500	8,4005
2	30	0,0000066267	0,8849	-0,1222	-2,9339
3	30	0,0000081433	1,0875	0,0839	2,0125
4	30	0,0000045567	0,6085	-0,4968	-11,9221
Suma	60				-4,4430

Ostatecznie (po podstawieniu wszystkich wyżej obliczonych współczynników i wyrażeń) otrzymujemy wartość statystyki M :

$$M = -\frac{1}{c} \sum_{i=1}^k (n_j - 1) \ln \frac{\hat{s}_j^2}{s^2} = -\frac{-4,4430}{1,017361} = 4,367$$

Jeżeli liczności próbek n_j są takie same i równe n obliczenie wyrażeń użytych w statystyce M wygląda następująco (dla $k = 4$; $n = 25$ oraz $m = 100$):

$$c = 1 + \frac{k + 1}{3k(n - 1)} = 1,017361;$$

$$s^2 = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \hat{s}_j^2 = 0,0000074883;$$

Lp	\hat{s}_j^2	$\ln \hat{s}_j^2$
1	0,0000106267	-11,4521
2	0,0000066267	-11,9244
3	0,0000081433	-11,7183
4	0,0000045567	-12,2989
Suma		-47,3938

$$M = \frac{n-1}{c} \left[k \ln s^2 - \sum_{j=1}^k \ln \hat{s}_j^2 \right] = 23,5904 \cdot [-47,2087 + 47,3938] = 4,367$$

Odczytując wartość kwantylu rozkładu $\chi_{r;1-\alpha}^2$ dla $r = k-1 = 3$ stopni swobody i poziomu ufności $1-\alpha = 0,90$ ($\alpha = 0,10$) otrzymujemy obszar krytyczny:

$$R_\alpha = (\chi_{r;1-\alpha}^2; \infty) = (6,251; \infty)$$

Ponieważ $M \notin R_\alpha$, więc nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0 o równości wariancji.

Rozkład χ^2												
Wartości χ^2_α , dla których $P(\chi^2 < \chi^2_\alpha) = \alpha$												
r \ α	0,005	0,010	0,020	0,025	0,050	0,100	0,900	0,950	0,975	0,980	0,990	0,995
1	0,000039	0,000157	0,000628	0,000982	0,00393	0,016	2,706	3,841	5,024	5,412	6,635	7,879
2	0,0100	0,0201	0,0404	0,0506	0,103	0,211	4,605	5,991	7,378	7,824	9,210	10,597
3	0,0717	0,115	0,185	0,216	0,352	0,584	6,251	7,815	9,348	9,837	11,345	12,838
4	0,207	0,297	0,429	0,484	0,711	1,064	7,779	9,488	11,143	11,668	13,277	14,860
5	0,412	0,554	0,752	0,831	1,145	1,610	9,236	11,070	12,833	13,388	15,086	16,750
6	0,676	0,872	1,134	1,237	1,635	2,204	10,645	12,592	14,449	15,033	16,812	18,548
7	0,989	1,239	1,564	1,690	2,167	2,833	12,017	14,067	16,013	16,622	18,475	20,278
8	1,344	1,646	2,032	2,180	2,733	3,490	13,362	15,507	17,535	18,168	20,090	21,955
9	1,735	2,088	2,532	2,700	3,325	4,168	14,684	16,919	19,023	19,679	21,666	23,589
10	2,156	2,558	3,059	3,247	3,940	4,865	15,987	18,307	20,483	21,161	23,209	25,188
11	2,603	3,053	3,609	3,816	4,575	5,578	17,275	19,675	21,920	22,618	24,725	26,757
12	3,074	3,571	4,178	4,404	5,226	6,304	18,549	21,026	23,337	24,054	26,217	28,300
13	3,565	4,107	4,765	5,009	5,892	7,042	19,812	22,362	24,736	25,472	27,688	29,819
14	4,075	4,660	5,368	5,629	6,571	7,790	21,064	23,685	26,119	26,873	29,141	31,319
15	4,601	5,229	5,985	6,262	7,261	8,547	22,307	24,996	27,488	28,259	30,578	32,801
16	5,142	5,812	6,614	6,908	7,962	9,312	23,542	26,296	28,845	29,633	32,000	34,267
17	5,697	6,408	7,255	7,564	8,672	10,085	24,769	27,587	30,191	30,995	33,409	35,718
18	6,265	7,015	7,906	8,231	9,390	10,865	25,989	28,869	31,526	32,346	34,805	37,156
19	6,844	7,633	8,567	8,907	10,117	11,651	27,204	30,144	32,852	33,687	36,191	38,582
20	7,434	8,260	9,237	9,591	10,851	12,443	28,412	31,410	34,170	35,020	37,566	39,997
21	8,034	8,897	9,915	10,283	11,591	13,240	29,615	32,671	35,479	36,343	38,932	41,401
22	8,643	9,542	10,600	10,982	12,338	14,041	30,813	33,924	36,781	37,659	40,289	42,796
23	9,260	10,196	11,293	11,689	13,091	14,848	32,007	35,172	38,076	38,968	41,638	44,181
24	9,886	10,856	11,992	12,401	13,848	15,659	33,196	36,415	39,364	40,270	42,980	45,559
25	10,520	11,524	12,697	13,120	14,611	16,473	34,382	37,652	40,646	41,566	44,314	46,928
26	11,160	12,198	13,409	13,844	15,379	17,292	35,563	38,885	41,923	42,856	45,642	48,290
27	11,808	12,879	14,125	14,573	16,151	18,114	36,741	40,113	43,195	44,140	46,963	49,645
28	12,461	13,565	14,847	15,308	16,928	18,939	37,916	41,337	44,461	45,419	48,278	50,993
29	13,121	14,256	15,574	16,047	17,708	19,768	39,087	42,557	45,722	46,693	49,588	52,336
30	13,787	14,953	16,306	16,791	18,493	20,599	40,256	43,773	46,979	47,962	50,892	53,672

Rozkład t-Studenta											
Wartości t_{α}, dla których $P(t > t_{\alpha}) = \alpha$											
r \ \alpha	0,500	0,400	0,300	0,200	0,100	0,050	0,020	0,010	0,005	0,002	0,001
1	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	127,321	318,309	636,619
2	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	14,089	22,327	31,599
3	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	7,453	10,215	12,924
4	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	5,598	7,173	8,610
5	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	4,773	5,893	6,869
6	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	4,317	5,208	5,959
7	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,029	4,785	5,408
8	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	3,833	4,501	5,041
9	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	3,690	4,297	4,781
10	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	3,581	4,144	4,587
11	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	3,497	4,025	4,437
12	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,428	3,930	4,318
13	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,372	3,852	4,221
14	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,326	3,787	4,140
15	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,286	3,733	4,073
16	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,252	3,686	4,015
17	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,222	3,646	3,965
18	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,197	3,610	3,922
19	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,174	3,579	3,883
20	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,153	3,552	3,850
21	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,135	3,527	3,819
22	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,119	3,505	3,792
23	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,104	3,485	3,768
24	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,091	3,467	3,745
25	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,078	3,450	3,725
26	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,067	3,435	3,707
27	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,057	3,421	3,690
28	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,047	3,408	3,674
29	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,038	3,396	3,659
30	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,030	3,385	3,646
∞	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	2,807	3,090	3,291