



Zakład Metrologii i Systemów Pomiarowych
Politechnika Poznańska

ul. Jana Pawła II 24 60-965 POZNAŃ
(budynek Centrum Mechatroniki, Biomechaniki i Nanoinżynierii)
www.zmisp.mt.put.poznan.pl tel. +48 61 665 35 70 fax +48 61 665 35 95

STATYSTYCZNA ANALIZA WYNIKÓW POMIARÓW

POZNAŃ III.2017

© ZMiSP

I. CEL ĆWICZENIA I ZAKRES ĆWICZENIA

Celem ćwiczenia jest wykonanie statystycznej analizy wyników pomiarów oraz zapoznanie studentów z pneumatycznymi narzędziami pomiarowymi.

II. PROGRAM ĆWICZENIA

W ćwiczeniu zostanie przeprowadzona statystyczna analiza wyników pomiarów partii elementów (próby) pobranych z populacji o nieznanymi parametrach statystycznych tj. wartości oczekiwanej i odchyleniu standardowym. Narzędziem pomiarowym zastosowanym w ćwiczeniu jest czujnik indukcyjny. Każdy z przedmiotów (wałeczków) wchodzących w skład próby zostanie jednokrotnie zmierzony bez zwracania. Opracowanie statystyczne obejmuje zadania opisane szczegółowo w instrukcji wykonane krok po kroku z wykorzystaniem arkusza kalkulacyjnego.

III. ZAKRES OBOWIĄZUJĄCEGO MATERIAŁU

- definicje populacji generalnej i próby (losowej, reprezentacyjnej),
- sposób konstrukcji histogramu, wieloboku częstości i dystrybuanty empirycznej,
- definicje podstawowych parametrów statystycznych: wartość oczekiwana, mediana, wariancja, odchylenie standardowe, współczynnik asymetrii,
- rozkłady statystyczne: normalny, Studenta, χ^2 (chi-kwadrat),
- estymatory – estymacja punktowa (wartość średnia \bar{x} , odchylenie średnie \hat{s})
- przedział ufności dla pojedynczego wyniku pomiaru, wartości oczekiwanej,
- test zgodności χ^2 ,
- umiejętność korzystania z funkcji statystycznych zawartych w arkuszu kalkulacyjnym,
- definicje błędów, zasady eliminacji błędów nadmiernych,
- budowa i zasada działania pneumatycznych przyrządów pomiarowych,
- statyczne właściwości metrologiczne przyrządów pomiarowych: czułość, zakres pomiarowy, podziałka przyrządu pomiarowego, działka elementarna, wartość działki elementarnej, błąd wskazania.

IV. LITERATURA

1. Bobrowski D, Maćkowiak-Łybacka K., Wybrane metody wnioskowania statystycznego. Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 2006.
2. Platt Cz., Problemy rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej. PWN, Warszawa 1978.
3. Bourg D. M., Excel w nauce i technice, Wydawnictwo Helion, Gliwice, 2006, str. 153–162.
4. Tomasiak J., i inni, Sprawdzanie przyrządów do pomiaru długości i kąta, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2009, str. 19–22.

V. OPIS STANOWISKA

W skład stanowiska pomiarowego (rys. 1) wchodzi:

1. Czujnik indukcyjny CENSOR z urządzeniem odczytowym – mierzy odchyłki mierzonego wymiaru, wynik w μm ,
2. Podstawa z kolumną i stołem pomiarowym do umieszczenia czujnika.



Rys. 1. Schemat stanowiska do statystycznej analizy wyników pomiarów (opis w tekście)

VI. ZADANIA DO WYKONANIA

Zadanie 1. Pomiar elementów wchodzących w skład próby

- dokonać pomiaru elementów stanowiących próbę z populacji, wyniki zapisać w arkuszu kalkulacyjnym (częściowo w tabelcy 1 sprawozdania),

Zadanie 2. Obliczenie parametrów szeregu rozdzielczego

- sprawdzić czy występują błędy nadmierne, i jeżeli są to je odrzucić,
- obliczyć rozstęp, liczbę i szerokość przedziałów klasowych,
- wykonać obliczenia wielkości podanych w tabelcy 2.

Zadanie 3. Histogram, wykres dystrybuanty empirycznej

- korzystając z wyników zamieszczonych w tabelcy 2 narysować histogram oraz wykres dystrybuanty empirycznej.

Zadanie 4. Obliczenie parametrów rozkładu dla szeregów rozdzielczych

- obliczyć średnią arytmetyczną \bar{x} ,
- obliczyć wariancję s^2 oraz odchylenie średnie s z próby,
- obliczyć asymetrię g_1 rozkładu,
- obliczeń dokonać korzystając z tabelcy 3,

Zadanie 5. Obliczenie dokładności oceny asymetrii

- a) obliczyć odchylenie średnie s_{g_1} parametru g_1 oceny asymetrii.

Zadanie 6. Sprawdzenie hipotezy o normalności rozkładu zmiennej losowej

- a) obliczyć wartości standaryzowane zmiennej losowej, prawdopodobieństwa w przedziałach klasowych i teoretyczne licznosci, a wyniki obliczeń wpisać do tablicy 4,
b) dokończyć obliczenia tabelaryczne i wykonać obliczenia statystyki χ^2_{obl} ,
c) przyjąć bądź odrzucić hipotezę o zgodności rozkładu empirycznego z rozkładem normalnym dla poziomu istotności α podanego przez prowadzącego.

Zadanie 7. Obliczenie granic przedziałów ufności

- a) odczytać z tablic statystycznych kwantyle rozkładu normalnego, studenta lub chi-kwadrat dla odpowiedniej liczby stopni swobody,
b) obliczyć przedziały ufności dla wartości oczekiwanej i odchylenia standardowego dla poziomu istotności α podanego przez prowadzącego,
c) obliczyć przedział ufności dla mierzonych średnic i obliczyć jaki procent wartości zmierzonych mieści się w tym przedziale.

Wnioski

VII. Przeznaczenie, charakterystyka i opis działania przyrządu CENSOR

Przyrząd CENSOR przeznaczony jest do pomiarów długości czujnikiem indukcyjnym.



Rys. 2. Widok przyrządu pomiarowego CENSOR

1. Dane techniczne

Zakres pomiarowy – $\pm 50 \mu\text{m}$, $\pm 15 \mu\text{m}$ lub $\pm 5 \mu\text{m}$

Wartości działki elementarnej (odpowiednio) – $2 \mu\text{m}$, $0,5 \mu\text{m}$, $0,2 \mu\text{m}$

2. Opis działania przyrządu

Do nastawienia zakresów pomiarowych przyrządu oraz do jego wyłączania (położenie 0) służy przełącznik 1. Dwa pokręta (2 i 3) służą do ustawienia zera przyrządu. Lewe zgrubne, prawe dokładne.

Przed przystąpieniem do pomiarów należy ustawić odpowiedni zakres pomiarowy (najczęściej $\pm 5 \mu\text{m}$), wstawić wałeczek i pokrętłami 2 i 3 ustawić położenie zerowe. Następnie wstawić kolejnych 5 wałeczków i tak wyregulować położenie wskazówki, aby przy skrajnych odchyłkach przyjmowała symetryczne położenie.

Odczytując wskazania należy dzielić działkę elementarną na pół. Przykładowo wskazanie na rys. 2 wynosi „-1,3 μm ”.

Przykład obliczeniowy

Z produkcji tulejek pobrano 80-cio elementową próbę. Wykonano pomiary odchyłek średnicy otworu od wymiaru nominalnego 40 mm otrzymując wyniki zamieszczone w tabelicy 1. Należy z prawdopodobieństwem 95% wyznaczyć przedział obejmujący średnią wartość średnicy otworu.

Tablica 1. Wyniki pomiaru odchyłek średnicy wewnętrznej tulejek od 40 mm w [mm]

0,007	0,015	0,009	0,002	0,016	0,004	0,016	0,015
0,016	0,017	0,009	0,016	0,015	0,016	0,016	0,008
0,012	0,011	0,009	0,005	0,010	0,018	0,015	0,006
0,012	0,015	0,015	0,013	0,006	0,018	0,016	0,016
0,014	0,017	0,015	0,013	0,015	0,012	0,014	0,021
0,008	0,011	0,016	0,010	0,008	0,014	0,005	0,018
0,003	0,007	0,008	0,013	0,015	0,009	0,009	0,005
0,015	0,013	0,015	0,008	0,017	0,015	0,013	0,010
0,011	0,016	0,014	0,015	0,013	0,013	0,016	0,020
0,009	0,004	0,011	0,009	0,016	0,008	0,013	0,015

Zadania szczegółowe

1. Przeprowadzić eliminację wyników pomiarów obarczonych błędami nadmiernymi (grubymi).
2. Obliczyć częstości względne oraz wartości empirycznej dystrybuanty zmiennej losowej (odchyłek średnicy otworu x).
3. Narysować histogram i wykres dystrybuanty empirycznej rozkładu zmiennej losowej (odchyłek średnicy otworu x).
4. Obliczyć parametry rozkładu dla szeregów rozdzielczych.
5. Obliczyć odchylenie średnie parametru oceny asymetrii.
6. Przedstawić funkcję gęstości rozkładu normalnego oraz funkcję dystrybuanty.
7. Sprawdzić hipotezę o normalności rozkładu.
8. Przeprowadzić estymację przedziałową zmiennej losowej, wartości oczekiwanej i odchylenia standardowego populacji na poziomie istotności α .

Rozwiązanie

Ad.1. Analizując wyniki pomiarów wielokrotnych, można zaobserwować wyniki o wartościach znacznie różnych od pozostałych. Można podejrzewać, że wyniki te są obciążone błędami nadmiernymi (grubymi), których przyczynami mogą być niezauważone podczas pomiarów: zmiany warunków pomiarów, niesprawność aparatury, pomyłki osób wykonujących pomiary błędy powstałe podczas przetwarzania wyników.

Zakładając, że zbiory wyników pomiarów mają rozkład normalny, eliminację błędów nadmiernych dokonuje się następująco:

- dla otrzymanego z pomiarów zbioru wyników oblicza się wartość średnią i odchylenie średnie,
- dla założonego poziomu ufności P wyznacza się przedział ufności mierzonej wielkości (zazwyczaj przyjmuje się poziom $P = 99,73\%$, dla którego kwantyl rozkładu normalnego u_α wynosi 3,00),
- dla wartości, które znajdują się poza przedziałem ufności, zakłada się hipotetycznie, że nie przynależą one do populacji, ponieważ prawdopodobieństwo ich wystąpienia jest zbyt małe i że nie przypadek spowodował ich pojawienie się, lecz błąd nadmierny, czyli odrzuca się je,
- po odrzuceniu wartości obciążonych błędami grubymi dalsze obliczenia statystyczne wykonuje się już normalnymi znanymi metodami.

Dla danych z tablicy 1 otrzymujemy $\bar{x} = 0,0123$; $\hat{s} = 0,0042$.

Zatem $\bar{x} - 3\hat{s} = -0,0003$; $\bar{x} + 3\hat{s} = 0,0249$. Stąd wobec $x_{min} = 0,002$ i $x_{max} = 0,021$ w przedziale $(-0,0003 \div 0,0249)$ mieszczą się wszystkie zmierzone wartości.

Ad.2. Tworząc szereg rozdzielczy należy zaobserwowane wartości średnicy w próbie uporządkować według przedziałów klasowych. Liczbę przedziałów klasowych ustala się biorąc pod uwagę licznosc próby oraz różnicę R (rozstęp) pomiędzy największą i najmniejszą wartością cechy (średnicy) w próbie. Wielkość R stanowi miarę rozproszenia wartości średnicy. Ważną kwestią jest ustalenie liczby k przedziałów klasowych. Jeżeli jest zbyt duża, to liczba obserwacji należących do każdego z przedziałów może być zbyt mała i wykres rozkładu może ulec zbyt dużym wypaczeniom. Natomiast, jeżeli liczba przedziałów jest zbyt mała, to nie zostaną uwidocznione charakterystyczne właściwości rozkładu. Jest ona ustalana w zależności od liczebności próby oznaczonej, jako N .

W literaturze można spotkać kilka zasad doboru liczby przedziałów, między innymi:

- liczba przedziałów klasowych powinna zawierać się pomiędzy 5 a 15,
- liczba przedziałów klasowych powinna spełniać nierówność:

$$0,5\sqrt{N} \leq k \leq \sqrt{N}$$

dla $N = 80$ $4,5 \leq k \leq 8,9$

- wg Huntsbergera

$$k = 1 + 3,3 \log N$$

dla $N = 80$ $k = 7,3$

- de Brookes i Carruthers proponują

$$k < 5 \log N$$

dla $N = 80$ $k < 9,5$

Jak wynika z tych zależności można przyjąć k w granicach od 5 do 8.

Do dalszych obliczeń przyjęto $k = 7$.

Szerokość przedziału klasowego h jest wielkością zależną rozstępu R oraz od liczby przedziałów klasowych k .

$$h > \frac{R}{k} = \frac{x_{max} - x_{min}}{k} = \frac{0,021 - 0,002}{7} > 0,0027 \text{ mm}$$

Wartość h musi być wielokrotnością działki elementarnej, zatem przyjęto $h = 0,003$ mm. Dolna granica pierwszego przedziału powinna być mniejsza od najmniejszej wartości próby, a górna ustalona tak, by ostatni przedział zawierał największą wartość. Przedziały klasowe są prawostronnie domknięte (prawe granice należą do nich). Liczba przedziałów klasowych k pomnożona przez szerokość przedziału h musi być nieznacznie większa od rozstępu.

W przykładzie przyjęto wartość początkową równą 0,001 mm, stąd pierwszy przedział będzie odpowiadał zakresowi (0,001÷0,004], drugi (0,004÷0,007] mm itd.

Liczbę zdarzeń w poszczególnych przedziałach klasowych podano w tablicy 2.

Tablica 2. Parametry częstościowe przedziałów klasowych

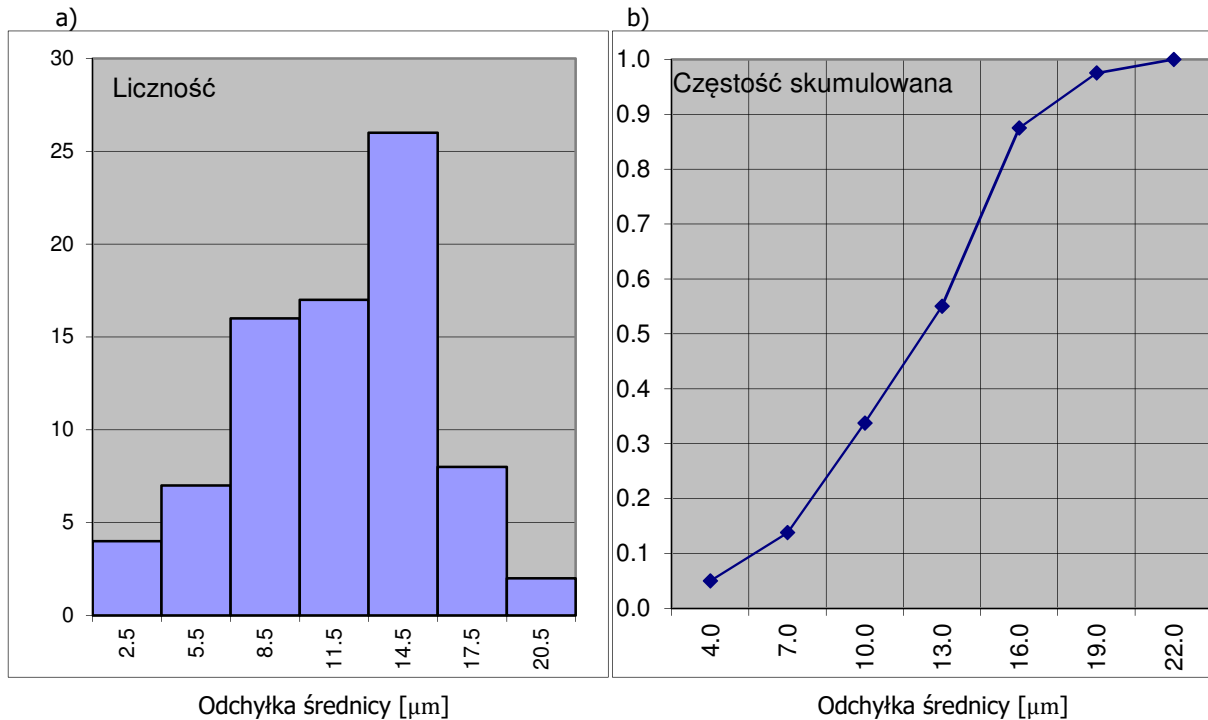
Nr przedziału	1	2	3	4	5	6	7
Granice przedziału klasowego [μm]	(1÷4]	(4÷7]	(7÷10]	(10÷13]	(13÷16]	(16÷19]	(19÷22]
Liczność n_i	4	7	16	17	26	8	2
Częstość Względna n_i/N	0,050	0,088	0,200	0,213	0,325	0,100	0,025
Częstość skumulowana	0,050	0,138	0,338	0,550	0,875	0,975	1,000

Wartości kontrolne: $N = \sum_{i=1}^7 n_i = 80$; $\sum_{i=1}^7 \frac{n_i}{N} = 1$

Ad.3. W celu wykonania histogramu na osi odciętych odkładamy wartości środków przedziałów klasowych (lub numery przedziałów). Szerokość przedziału klasowego stanowi podstawę prostokąta, którego wysokość wyraża licznosc zmierzonych elementów w rozpatrywanym przedziale klasowym (tablica 2). Na osi rzędnych mogą być również podane wartości częstości względnych.

Wykreślając dystrybuantę empiryczną na osi odciętych odkładamy prawe granice przedziałów klasowych a na osi rzędnych częstość skumulowaną.

Na podstawie danych z tablicy 2 narysowano histogram i wielobok skumulowanych częstości (wykres dystrybuanty empirycznej).



Rys. 1. Wykresy: (a) histogram, (b) dystrybuanta empiryczna

Ad.4. Obliczenia szczegółowe parametrów rozkładu.

a) średnia

W przypadku prób o licznosci powyzej $N > 25$ celowe jest obliczenie średniej arytmetycznej ze wzoru:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k x_i^* n_i$$

gdzie x_i^* wartosc zmiennej w srodku i -tego przedzialu klasowego (tablica 3),

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k x_i^* n_i = \frac{938}{80} = 11,73 \mu\text{m}$$

b) wariancja z próby s^2 i odchylenie średnie s z uwzględnieniem poprawki Shepparda na grupowanie (h – długość przedziału klasowego),

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i^* - \bar{x})^2 n_i}{N} - \frac{h^2}{12} = \frac{1399,95}{80} - \frac{3^2}{12} = 17,50 - 0,75 = 16,75$$

$$s = \sqrt{16,75} = 4,09 \mu\text{m}$$

c) asymetria (skośność)

$$g_1 = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i^* - \bar{x})^3 n_i}{N \cdot s^3} = \frac{-1917,88}{80 \cdot 4,09^3} = -0,350$$

Ad.5. Obliczenie odchylenia średniego s_{g_1} parametru g_1 oceny asymetrii

$$s_{g_1} = \sqrt{\frac{6 \cdot (n-1)}{(n+1) \cdot (n+3)}} = 0,266$$

Jeżeli rozkład średnicy otworów jest symetryczny, to powinno być $g_1 = 0$. Można zauważyć, że obliczona wartość odbiega od wartości zerowej, jednak nie więcej niż o dwa odchylenie

nia średnie ($2 \cdot s_{g1} = 0,532$), co pozwala przyjąć rozkład, jako symetryczny. Potwierdza to również wygląd histogramu.

Tablica 3. Wartości momentów rozkładu średnic otworów x_i

				Obliczenie średniej	Moment 1-go rzędu	Moment 2-go rzędu	Moment 3-go rzędu
Nr przedziału	Granice przedziału klasowego [μm]	Środek przedziału x_i^*	Liczność n_i	$(x_i^*)n_i$	$(x_i^* - \bar{x})n_i$	$(x_i^* - \bar{x})^2 n_i$	$(x_i^* - \bar{x})^3 n_i$
1	(1÷4]	2,5	4	10,00	-36,900	340,403	-3140,213
2	(4÷7]	5,5	7	38,50	-43,575	271,254	-1688,558
3	(7÷10]	8,5	16	136,00	-51,600	166,410	-536,672
4	(10÷13]	11,5	17	195,50	-3,825	0,861	-0,194
5	(13÷16]	14,5	26	377,00	72,150	200,216	555,600
6	(16÷19]	17,5	8	140,00	46,200	266,805	1540,799
7	(19÷22]	20,5	2	41,00	17,550	154,001	1351,361
Suma			80	938,00	0,000	1399,950	-1917,878

Ad.6. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa rozkładu normalnego ma postać:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Punktowe oceny parametrów (estymatory) rozkładu normalnego wynoszą:

$$\mu: \quad \bar{x} = 1,73\mu\text{m},$$

$$\sigma: \quad s = 4,09\mu\text{m}.$$

Po podstawieniu danych przyjmuje postać

$$f(x) = \frac{1}{4,09\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-1,73)^2}{2 \cdot 4,09^2}\right)$$

oraz dystrybuanta

$$F(x) = \frac{1}{4,09\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{(x-1,73)^2}{2 \cdot 4,09^2}\right) dx$$

Wartości dystrybuanty odczytujemy z tablic.

Ad.7. Sprawdzenie hipotezy o normalności rozkładu zmiennej losowej (średnicy otworów) – zastosowano test zgodności χ^2 (chi-kwadrat) [1,2]

Jeżeli licznosc w którymś przedziale klasowym będzie mniejsza od 5 to należy ten przedział połączyć z sąsiednim tak, aby suma licznosci przedziałów była co najmniej równa 5. W przykładzie obliczeniowym zostały połączone przedziały 1 i 2 oraz 6 i 7.

a) wartości zmiennych losowych standaryzowanych obliczamy wg wzoru:

$$u_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma}, \quad \text{czyli} \quad u_i = \frac{x_i - 1,73}{4,09}$$

Korzystając z wartości dystrybuanty [1], obliczamy prawdopodobieństwa znalezienia zmiennej losowej standaryzowanej u_i w przedziale $(x_{i-1}; x_i]$

$$p_i = P(x_{i-1} < X < x_i) = F(u_i) - F(u_{i-1})$$

Przykładowo prawdopodobieństwo obliczone dla przedziału (10,0; 13,0] wynosi

$$\begin{aligned} p_3 &= P(10,0 < X < 13,0) = F\left(\frac{13,0-1,73}{4,09}\right) - F\left(\frac{10,0-1,73}{4,09}\right) = \\ &= F(0,311) - F(-0,423) = 0,622 - 0,336 = 0,286 \end{aligned}$$

Wyjaśnienia wymaga obliczenie prawdopodobieństwa w pierwszym i ostatnim przedziale. Otóż prawdopodobieństwo dla pierwszego przedziału jest równe wartości dystrybuanty dla prawej granicy przedziału czyli dla obszaru od $-\infty$ do prawej granicy.

$$u_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} = \frac{7,0 - 11,73}{4,09} = -1,156$$

$$p_1 = P(-\infty < X < 7,0) = F(-1,156) = 0,124$$

Natomiast prawdopodobieństwo dla ostatniego przedziału traktujemy jak obszar od lewej granicy do $+\infty$.

$$u_4 = \frac{x_4 - \mu}{\sigma} = \frac{16,0 - 11,73}{4,09} = 1,044$$

$$p_5 = P(16,0 < X < +\infty) = 1 - F(1,044) = 0,148$$

Wyniki obliczeń dla wszystkich przedziałów wszystkich zamieszczono w tablicy 4.

Tablica 4. Parametry częstościowe przedziałów klasowych

nr przedziału	Granice przedz. klas. [μm]	Liczność n_i	Przedziały standaryzowane $(u_{i-1}; u_i]$	$F(u_i)$	p_i	np_i	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
1	(1,0; 7,0]	11	[$-\infty$; -1,156)	0,124	0,124	9,92	0,118
2	(7,0; 10,0]	16	[-1,156; -0,423)	0,336	0,212	16,96	0,054
3	(10,0; 13,0]	17	[-0,423; 0,311)	0,622	0,286	22,88	1,511
4	(13,0; 16,0]	26	[0,311; 1,044)	0,852	0,230	18,40	3,139
5	(16,0; 22,0]	10	[1,044; $+\infty$)		0,148	11,84	0,286
	Suma	80			1,000	80,00	5,108

b) obliczenie wartości statystyki χ^2

Statystyka χ^2 stanowi miarę rozbieżności między rozkładami empirycznymi i teoretycznymi o dystrybuancie $F(x)$

$$\chi_{obl}^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - n_{teor})^2}{n_{teor}} = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$$

gdzie

- n_i – licznosc empiryczna i -tego przedziału,
- n_{teor} – teoretyczna licznosc i -tego przedziału,
- N – liczebność próby,
- p_i – prawdopodobieństwo znalezienia się zmiennej losowej x_i w i -tym przedziale klasowym (o środku w punkcie x_i^*) wyznaczone przez hipotetyczną dystrybuantę.

Z tablic rozkładu χ^2 dla poziomu istotności $\alpha = 0,05$ i liczbie stopni swobody $r = k - l - 1 = 5 - 2 - 1 = 2$ (k – liczba przedziałów, l – liczba parametrów rozkładu oszacowanych z próby) odczytujemy wartość krytyczną $\chi_{2;0,05}^2 = 5,991$. Jeśli $\chi_{obl}^2 \leq \chi_{2;0,05}^2$ to oznacza, że nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o normalnym rozkładzie średnic otworów.

Ad.8. Obliczenie granic przedziałów ufności dla wartości oczekiwanej, odchylenia standardowego i zmiennej losowej.

Jeśli z populacji o nieznanach parametrach (μ , σ) wartości oczekiwanej i odchyleniu standardowym, zostanie pobrana dostatecznie duża próba losowa (w przykładzie 80-cio elementowa) o rozkładzie normalnym, to wówczas przedział ufności dla wartości oczekiwanej wynosi

$$\bar{x} - \varepsilon < \mu < \bar{x} + \varepsilon$$

W celu obliczenia granic przedziału ufności posługujemy się tablicami rozkładu normalnego (dla $N \geq 30$). Dla przyjętego prawdopodobieństwa $P = 1 - \alpha = 0,95$ kwantyl rozkładu $u_{0,05} = 1,960$ a długość przedziału ε wynosi:

$$\varepsilon = u_{\alpha} \frac{s}{\sqrt{N}} = 1,960 \cdot \frac{4,09}{\sqrt{80}} = 0,896 \text{ } [\mu\text{m}]$$

Zatem przedział ufności dla wartości oczekiwanej można zapisać:

$$11,73 - 0,90 < \mu < 11,73 + 0,90 \text{ } [\mu\text{m}]$$

$$10,83 < \mu < 12,63 \text{ } [\mu\text{m}]$$

Dla próbki małej ($N \leq 30$) należy skorzystać z tablic rozkładu t-Studenta i odczytać kwantyl rozkładu $t_{r,\alpha}$ dla $r = N - 1$ stopni swobody. Dla przykładowej próbki $t_{79;0,05} = 1,990$, a długość przedziału ε wynosi:

$$\varepsilon = t_{r,\alpha} \frac{s}{\sqrt{N}} = 1,990 \cdot \frac{4,09}{\sqrt{80}} = 0,910 \text{ } [\mu\text{m}]$$

Zatem przedział ufności dla wartości oczekiwanej można zapisać:

$$11,73 - 0,91 < \mu < 11,73 + 0,91 \text{ } [\mu\text{m}]$$

$$10,82 < \mu < 12,64 \text{ } [\mu\text{m}]$$

Jak widać szerokości przedziałów obliczone z obu rozkładów bardzo niewiele się różnią.

W celu obliczenia przedziału ufności dla odchylenia standardowego dla dużej próbki posługujemy się kwantylem rozkładu normalnego poprzednio odczytanego $u_{0,05} = 1,960$

$$\frac{s}{1 + \frac{u_{\alpha}}{\sqrt{2N}}} < \sigma < \frac{s}{1 - \frac{u_{\alpha}}{\sqrt{2N}}}$$

Podstawiając wartości liczbowe otrzymujemy:

$$\rho = \frac{u_{\alpha}}{\sqrt{2N}} = \frac{1,960}{\sqrt{160}} = 0,155$$

$$3,54 < \sigma < 4,84$$

Obliczając ten sam przedział dla małej próbki korzystamy z rozkładu χ^2 chi-kwadrat najpierw odczytujemy kwantyle dla $r = N - 1$ stopni swobody oraz poziomów $\frac{\alpha}{2}$ i $1 - \frac{\alpha}{2}$

$$\chi_{79;0,025}^2 = 105,473; \quad \chi_{79;0,975}^2 = 56,309$$

Przedział ufności obliczamy ze wzoru:

$$\frac{Ns^2}{\chi_{r;\frac{\alpha}{2}}^2} < \sigma < \frac{Ns^2}{\chi_{r;1-\frac{\alpha}{2}}^2}$$

Podstawiając wartości liczbowe otrzymujemy:

$$3,56 < \sigma < 4,88$$

Przedziały dla odchylenia standardowego również niewiele się różnią przy ich obliczaniu dwoma metodami.

Aby obliczyć przedział ufności dla mierzonych odchyłek średnic Δd skorzystamy ze wzoru:

$$\bar{x} - \varepsilon < \Delta d < \bar{x} + \varepsilon$$

W celu obliczenia granic przedziału ufności posługujemy się tablicami rozkładu normalnego (dla $N \geq 30$). Dla przyjętego prawdopodobieństwa $P = 1 - \alpha = 0,95$ kwantyl rozkładu $u_{0,05} = 1,960$ a długość przedziału ε wynosi:

$$\varepsilon = u_{\alpha} \cdot s = 1,960 \cdot 4,09 = 8,02 \text{ } [\mu\text{m}]$$

Zatem przedział ufności dla odchyłek średnic można zapisać:

$$11,73 - 8,02 < \Delta d < 11,73 + 8,02 \text{ } [\mu\text{m}]$$

$$3,71 < \Delta d < 19,75 \text{ } [\mu\text{m}]$$

Dla próbki małej ($N \leq 30$) należy skorzystać z tablic rozkładu t-Studenta i odczytać kwantyl rozkładu $t_{r,\alpha}$ dla $r = N - 1$ stopni swobody. Dla przykładowej próbki $t_{79,0,05} = 1,990$, a długość przedziału ε wynosi:

$$\varepsilon = t_{r,\alpha} \cdot s = 1,990 \cdot 4,09 = 8,14 \text{ } [\mu\text{m}]$$

Zatem przedział ufności dla wartości oczekiwanej można zapisać:

$$11,73 - 8,14 < \Delta d < 11,73 + 8,14 \text{ } [\mu\text{m}]$$

$$3,59 < \Delta d < 19,87 \text{ } [\mu\text{m}]$$

Jak widać szerokości przedziałów obliczone z obu rozkładów bardzo niewiele się różnią.

Żeby obliczyć ile pomiarów mieści się w wyznaczonym przedziale należy odrzucić wymiary mniejsze lub równe 0,004 mm oraz większe lub równe 0,020 mm. Takich pomiarów są w sumie 4 (zaznaczone na czerwono) w tablicy 1 zatem w wyznaczonym przedziale mieści się $74/80 = 93\%$ wyników.

Dystrybuanta rozkładu normalnego N(0,1)										
u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
-0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
-0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
-0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
-0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
-0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
-0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
-0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
-0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
-0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
-1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
-1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
-1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,09853
-1,3	0,09680	0,09510	0,09342	0,09176	0,09012	0,08851	0,08691	0,08534	0,08379	0,08226
-1,4	0,08076	0,07927	0,07780	0,07636	0,07493	0,07353	0,07215	0,07078	0,06944	0,06811
-1,5	0,06681	0,06552	0,06426	0,06301	0,06178	0,06057	0,05938	0,05821	0,05705	0,05592
-1,6	0,05480	0,05370	0,05262	0,05155	0,05050	0,04947	0,04846	0,04746	0,04648	0,04551
-1,7	0,04457	0,04363	0,04272	0,04182	0,04093	0,04006	0,03920	0,03836	0,03754	0,03673
-1,8	0,03593	0,03515	0,03438	0,03362	0,03288	0,03216	0,03144	0,03074	0,03005	0,02938
-1,9	0,02872	0,02807	0,02743	0,02680	0,02619	0,02559	0,02500	0,02442	0,02385	0,02330
-2,0	0,02275	0,02222	0,02169	0,02118	0,02068	0,02018	0,01970	0,01923	0,01876	0,01831
-2,1	0,01786	0,01743	0,01700	0,01659	0,01618	0,01578	0,01539	0,01500	0,01463	0,01426
-2,2	0,01390	0,01355	0,01321	0,01287	0,01255	0,01222	0,01191	0,01160	0,01130	0,01101
-2,3	0,01072	0,01044	0,01017	0,009903	0,009642	0,009387	0,009137	0,008894	0,008656	0,008424
-2,4	0,008198	0,007976	0,007760	0,007549	0,007344	0,007143	0,006947	0,006756	0,006569	0,006387

Dystrybuanta rozkładu normalnego N(0,1)										
u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
-2,5	0,006210	0,006037	0,005868	0,005703	0,005543	0,005386	0,005234	0,005085	0,004940	0,004799
-2,6	0,004661	0,004527	0,004396	0,004269	0,004145	0,004025	0,003907	0,003793	0,003681	0,003573
-2,7	0,003467	0,003364	0,003264	0,003167	0,003072	0,002980	0,002890	0,002803	0,002718	0,002635
-2,8	0,002555	0,002477	0,002401	0,002327	0,002256	0,002186	0,002118	0,002052	0,001988	0,001926
-2,9	0,001866	0,001807	0,001750	0,001695	0,001641	0,001589	0,001538	0,001489	0,001441	0,001395
-3,0	0,001350	0,001306	0,001264	0,001223	0,001183	0,001144	0,001107	0,001070	0,001035	0,001001
-3,1	0,0 ³ 9676	0,0 ³ 9354	0,0 ³ 9043	0,0 ³ 8740	0,0 ³ 8447	0,0 ³ 8164	0,0 ³ 7888	0,0 ³ 7622	0,0 ³ 7364	0,0 ³ 7114
-3,2	0,0 ³ 6871	0,0 ³ 6637	0,0 ³ 6410	0,0 ³ 6190	0,0 ³ 5976	0,0 ³ 5770	0,0 ³ 5571	0,0 ³ 5377	0,0 ³ 5190	0,0 ³ 5009
-3,3	0,0 ³ 4834	0,0 ³ 4665	0,0 ³ 4501	0,0 ³ 4342	0,0 ³ 4189	0,0 ³ 4041	0,0 ³ 3897	0,0 ³ 3758	0,0 ³ 3624	0,0 ³ 3495
-3,4	0,0 ³ 3369	0,0 ³ 3248	0,0 ³ 3131	0,0 ³ 3018	0,0 ³ 2909	0,0 ³ 2803	0,0 ³ 2701	0,0 ³ 2602	0,0 ³ 2507	0,0 ³ 2415
-3,5	0,0 ³ 2326	0,0 ³ 2241	0,0 ³ 2158	0,0 ³ 2078	0,0 ³ 2001	0,0 ³ 1926	0,0 ³ 1854	0,0 ³ 1785	0,0 ³ 1718	0,0 ³ 1653
-3,6	0,0 ³ 1591	0,0 ³ 1531	0,0 ³ 1473	0,0 ³ 1417	0,0 ³ 1363	0,0 ³ 1311	0,0 ³ 1261	0,0 ³ 1213	0,0 ³ 1166	0,0 ³ 1121
-3,7	0,0 ³ 1078	0,0 ³ 036	0,0 ⁴ 9961	0,0 ⁴ 9574	0,0 ⁴ 9201	0,0 ⁴ 8842	0,0 ⁴ 8496	0,0 ⁴ 8162	0,0 ⁴ 7841	0,0 ⁴ 7532
-3,8	0,0 ⁴ 7235	0,0 ⁴ 6948	0,0 ⁴ 6673	0,0 ⁴ 6407	0,0 ⁴ 6152	0,0 ⁴ 5906	0,0 ⁴ 5669	0,0 ⁴ 5442	0,0 ⁴ 5223	0,0 ⁴ 5012
-3,9	0,0 ⁴ 4810	0,0 ⁴ 4615	0,0 ⁴ 4427	0,0 ⁴ 4247	0,0 ⁴ 4074	0,0 ⁴ 3908	0,0 ⁴ 3747	0,0 ⁴ 3594	0,0 ⁴ 3446	0,0 ⁴ 3304
-4,0	0,0 ⁴ 3167	0,0 ⁴ 3036	0,0 ⁴ 2910	0,0 ⁴ 2789	0,0 ⁴ 2673	0,0 ⁴ 2561	0,0 ⁴ 2454	0,0 ⁴ 2351	0,0 ⁴ 2252	0,0 ⁴ 2157
-4,1	0,0 ⁴ 2066	0,0 ⁴ 1978	0,0 ⁴ 1894	0,0 ⁴ 1814	0,0 ⁴ 1737	0,0 ⁴ 1662	0,0 ⁴ 1591	0,0 ⁴ 1523	0,0 ⁴ 1458	0,0 ⁴ 1395
-4,2	0,0 ⁴ 1335	0,0 ⁴ 1277	0,0 ⁴ 1222	0,0 ⁴ 1168	0,0 ⁴ 1118	0,0 ⁴ 1069	0,0 ⁴ 1022	0,0 ⁵ 9774	0,0 ⁵ 9345	0,0 ⁵ 8934
-4,3	0,0 ⁵ 8540	0,0 ⁵ 8163	0,0 ⁵ 7801	0,0 ⁵ 7455	0,0 ⁵ 7124	0,0 ⁵ 6807	0,0 ⁵ 6503	0,0 ⁵ 6212	0,0 ⁵ 5934	0,0 ⁵ 5668
-4,4	0,0 ⁵ 5413	0,0 ⁵ 5169	0,0 ⁵ 4935	0,0 ⁵ 4712	0,0 ⁵ 4498	0,0 ⁵ 4294	0,0 ⁵ 4098	0,0 ⁵ 3911	0,0 ⁵ 3732	0,0 ⁵ 3561
-4,5	0,0 ⁵ 3398	0,0 ⁵ 3241	0,0 ⁵ 3092	0,0 ⁵ 2949	0,0 ⁵ 2813	0,0 ⁵ 2682	0,0 ⁵ 2558	0,0 ⁵ 2439	0,0 ⁵ 2325	0,0 ⁵ 2216
-4,6	0,0 ⁵ 2112	0,0 ⁵ 2013	0,0 ⁵ 1919	0,0 ⁵ 1828	0,0 ⁵ 1742	0,0 ⁵ 1660	0,0 ⁵ 1581	0,0 ⁵ 1506	0,0 ⁵ 1434	0,0 ⁵ 1366
-4,7	0,0 ⁵ 1301	0,0 ⁵ 1239	0,0 ⁵ 1179	0,0 ⁵ 1123	0,0 ⁵ 1069	0,0 ⁵ 1017	0,0 ⁶ 9680	0,0 ⁶ 9211	0,0 ⁶ 8765	0,0 ⁶ 8339
-4,8	0,0 ⁶ 7933	0,0 ⁶ 7547	0,0 ⁶ 7178	0,0 ⁶ 6827	0,0 ⁶ 6492	0,0 ⁶ 6173	0,0 ⁶ 5869	0,0 ⁶ 5580	0,0 ⁶ 5304	0,0 ⁶ 5042
-4,9	0,0 ⁶ 4792	0,0 ⁶ 4554	0,0 ⁶ 4327	0,0 ⁶ 4111	0,0 ⁶ 3906	0,0 ⁶ 3711	0,0 ⁶ 3525	0,0 ⁶ 3348	0,0 ⁶ 3179	0,0 ⁶ 3019

Dystrybuanta rozkładu normalnego N(0,1)										
u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,990097	0,990358	0,990613	0,990863	0,991106	0,991344	0,991576
2,4	0,991802	0,992024	0,992240	0,992451	0,992656	0,992857	0,993053	0,993244	0,993431	0,993613

Dystrybuanta rozkładu normalnego N(0,1)										
u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
2,5	0,993790	0,993963	0,994132	0,994297	0,994457	0,994614	0,994766	0,994915	0,995060	0,995201
2,6	0,995339	0,995473	0,995604	0,995731	0,995855	0,995975	0,996093	0,996207	0,996319	0,996427
2,7	0,996533	0,996636	0,996736	0,996833	0,996928	0,997020	0,997110	0,997197	0,997282	0,997365
2,8	0,997445	0,997523	0,997599	0,997673	0,997744	0,997814	0,997882	0,997948	0,998012	0,998074
2,9	0,998134	0,998193	0,998250	0,998305	0,998359	0,998411	0,998462	0,998511	0,998559	0,998605
3,0	0,998650	0,998694	0,998736	0,998777	0,998817	0,998856	0,998893	0,998930	0,998965	0,998999
3,1	0,9 ³ 0324	0,9 ³ 0646	0,9 ³ 0957	0,9 ³ 1260	0,9 ³ 1553	0,9 ³ 1836	0,9 ³ 2112	0,9 ³ 2378	0,9 ³ 2636	0,9 ³ 2886
3,2	0,9 ³ 3129	0,9 ³ 3363	0,9 ³ 3590	0,9 ³ 3810	0,9 ³ 4024	0,9 ³ 4230	0,9 ³ 4429	0,9 ³ 4623	0,9 ³ 4810	0,9 ³ 4991
3,3	0,9 ³ 5166	0,9 ³ 5335	0,9 ³ 5499	0,9 ³ 5658	0,9 ³ 5811	0,9 ³ 5959	0,9 ³ 6103	0,9 ³ 6242	0,9 ³ 6376	0,9 ³ 6505
3,4	0,9 ³ 6631	0,9 ³ 6752	0,9 ³ 6869	0,9 ³ 6982	0,9 ³ 7091	0,9 ³ 7197	0,9 ³ 7299	0,9 ³ 7398	0,9 ³ 7493	0,9 ³ 7585
3,5	0,9 ³ 7674	0,9 ³ 7759	0,9 ³ 7842	0,9 ³ 7922	0,9 ³ 7999	0,9 ³ 8074	0,9 ³ 8146	0,9 ³ 8215	0,9 ³ 8282	0,9 ³ 8347
3,6	0,9 ³ 8409	0,9 ³ 8469	0,9 ³ 8527	0,9 ³ 8583	0,9 ³ 8637	0,9 ³ 8689	0,9 ³ 8739	0,9 ³ 8787	0,9 ³ 8834	0,9 ³ 8879
3,7	0,9 ³ 8922	0,9 ⁴ 8964	0,9 ⁴ 0039	0,9 ⁴ 0426	0,9 ⁴ 0799	0,9 ⁴ 1158	0,9 ⁴ 1504	0,9 ⁴ 1838	0,9 ⁴ 2159	0,9 ⁴ 2468
3,8	0,9 ⁴ 2765	0,9 ⁴ 3052	0,9 ⁴ 3327	0,9 ⁴ 3593	0,9 ⁴ 3848	0,9 ⁴ 4094	0,9 ⁴ 4331	0,9 ⁴ 4558	0,9 ⁴ 4777	0,9 ⁴ 4988
3,9	0,9 ⁴ 5190	0,9 ⁴ 5385	0,9 ⁴ 5573	0,9 ⁴ 5753	0,9 ⁴ 5926	0,9 ⁴ 6092	0,9 ⁴ 6253	0,9 ⁴ 6406	0,9 ⁴ 6554	0,9 ⁴ 6696
4,0	0,9 ⁴ 6833	0,9 ⁴ 6964	0,9 ⁴ 7090	0,9 ⁴ 7211	0,9 ⁴ 7327	0,9 ⁴ 7439	0,9 ⁴ 7546	0,9 ⁴ 7649	0,9 ⁴ 7748	0,9 ⁴ 7843
4,1	0,9 ⁴ 7934	0,9 ⁴ 8022	0,9 ⁴ 8106	0,9 ⁴ 8186	0,9 ⁴ 8263	0,9 ⁴ 8338	0,9 ⁴ 8409	0,9 ⁴ 8477	0,9 ⁴ 8542	0,9 ⁴ 8605
4,2	0,9 ⁴ 8665	0,9 ⁴ 8723	0,9 ⁴ 8778	0,9 ⁴ 8832	0,9 ⁴ 8882	0,9 ⁴ 8931	0,9 ⁴ 8978	0,9 ⁵ 0226	0,9 ⁵ 0655	0,9 ⁵ 1066
4,3	0,9 ⁵ 1460	0,9 ⁵ 1837	0,9 ⁵ 2199	0,9 ⁵ 2545	0,9 ⁵ 2876	0,9 ⁵ 3193	0,9 ⁵ 3497	0,9 ⁵ 3788	0,9 ⁵ 4066	0,9 ⁵ 4332
4,4	0,9 ⁵ 4587	0,9 ⁵ 4831	0,9 ⁵ 5065	0,9 ⁵ 5288	0,9 ⁵ 5502	0,9 ⁵ 5706	0,9 ⁵ 5902	0,9 ⁵ 6089	0,9 ⁵ 6268	0,9 ⁵ 6439
4,5	0,9 ⁵ 6602	0,9 ⁵ 6759	0,9 ⁵ 6908	0,9 ⁵ 7051	0,9 ⁵ 7187	0,9 ⁵ 7318	0,9 ⁵ 7442	0,9 ⁵ 7561	0,9 ⁵ 7675	0,9 ⁵ 7784
4,6	0,9 ⁵ 7888	0,9 ⁵ 7987	0,9 ⁵ 8081	0,9 ⁵ 8172	0,9 ⁵ 8258	0,9 ⁵ 8340	0,9 ⁵ 8419	0,9 ⁵ 8494	0,9 ⁵ 8566	0,9 ⁵ 8634
4,7	0,9 ⁵ 8699	0,9 ⁵ 8761	0,9 ⁵ 8821	0,9 ⁵ 8877	0,9 ⁵ 8931	0,9 ⁵ 8983	0,9 ⁶ 0320	0,9 ⁶ 0789	0,9 ⁶ 1235	0,9 ⁶ 1661
4,8	0,9 ⁶ 2067	0,9 ⁶ 2453	0,9 ⁶ 2822	0,9 ⁶ 3173	0,9 ⁶ 3508	0,9 ⁶ 3827	0,9 ⁶ 4131	0,9 ⁶ 4420	0,9 ⁶ 4696	0,9 ⁶ 4958
4,9	0,9 ⁶ 5208	0,9 ⁶ 5446	0,9 ⁶ 5673	0,9 ⁶ 5889	0,9 ⁶ 6094	0,9 ⁶ 6289	0,9 ⁶ 6475	0,9 ⁶ 6652	0,9 ⁶ 6821	0,9 ⁶ 6981

Rozkład t-Studenta											
Wartości t_{α}, dla których $P(t > t_{\alpha}) = \alpha$											
r \ \alpha	0,500	0,400	0,300	0,200	0,100	0,050	0,020	0,010	0,005	0,002	0,001
1	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	127,321	318,309	636,619
2	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	14,089	22,327	31,599
3	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	7,453	10,215	12,924
4	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	5,598	7,173	8,610
5	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	4,773	5,893	6,869
6	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	4,317	5,208	5,959
7	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,029	4,785	5,408
8	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	3,833	4,501	5,041
9	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	3,690	4,297	4,781
10	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	3,581	4,144	4,587
11	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	3,497	4,025	4,437
12	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,428	3,930	4,318
13	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,372	3,852	4,221
14	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,326	3,787	4,140
15	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,286	3,733	4,073
16	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,252	3,686	4,015
17	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,222	3,646	3,965
18	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,197	3,610	3,922
19	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,174	3,579	3,883
20	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,153	3,552	3,850
21	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,135	3,527	3,819
22	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,119	3,505	3,792
23	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,104	3,485	3,768
24	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,091	3,467	3,745
25	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,078	3,450	3,725
26	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,067	3,435	3,707
27	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,057	3,421	3,690
28	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,047	3,408	3,674
29	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,038	3,396	3,659
30	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,030	3,385	3,646
∞	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	2,807	3,090	3,291

Rozkład χ^2												
Wartości χ^2_α , dla których $P(\chi^2 < \chi^2_\alpha) = \alpha$												
r \ \alpha	0,005	0,010	0,020	0,025	0,050	0,100	0,900	0,950	0,975	0,980	0,990	0,995
1	0,0 ⁴ 393	0,0 ³ 157	0,0 ³ 628	0,0 ³ 982	0,00393	0,016	2,706	3,841	5,024	5,412	6,635	7,879
2	0,0100	0,0201	0,0404	0,0506	0,103	0,211	4,605	5,991	7,378	7,824	9,210	10,597
3	0,0717	0,115	0,185	0,216	0,352	0,584	6,251	7,815	9,348	9,837	11,345	12,838
4	0,207	0,297	0,429	0,484	0,711	1,064	7,779	9,488	11,143	11,668	13,277	14,860
5	0,412	0,554	0,752	0,831	1,145	1,610	9,236	11,070	12,833	13,388	15,086	16,750
6	0,676	0,872	1,134	1,237	1,635	2,204	10,645	12,592	14,449	15,033	16,812	18,548
7	0,989	1,239	1,564	1,690	2,167	2,833	12,017	14,067	16,013	16,622	18,475	20,278
8	1,344	1,646	2,032	2,180	2,733	3,490	13,362	15,507	17,535	18,168	20,090	21,955
9	1,735	2,088	2,532	2,700	3,325	4,168	14,684	16,919	19,023	19,679	21,666	23,589
10	2,156	2,558	3,059	3,247	3,940	4,865	15,987	18,307	20,483	21,161	23,209	25,188
11	2,603	3,053	3,609	3,816	4,575	5,578	17,275	19,675	21,920	22,618	24,725	26,757
12	3,074	3,571	4,178	4,404	5,226	6,304	18,549	21,026	23,337	24,054	26,217	28,300
13	3,565	4,107	4,765	5,009	5,892	7,042	19,812	22,362	24,736	25,472	27,688	29,819
14	4,075	4,660	5,368	5,629	6,571	7,790	21,064	23,685	26,119	26,873	29,141	31,319
15	4,601	5,229	5,985	6,262	7,261	8,547	22,307	24,996	27,488	28,259	30,578	32,801
16	5,142	5,812	6,614	6,908	7,962	9,312	23,542	26,296	28,845	29,633	32,000	34,267
17	5,697	6,408	7,255	7,564	8,672	10,085	24,769	27,587	30,191	30,995	33,409	35,718
18	6,265	7,015	7,906	8,231	9,390	10,865	25,989	28,869	31,526	32,346	34,805	37,156
19	6,844	7,633	8,567	8,907	10,117	11,651	27,204	30,144	32,852	33,687	36,191	38,582
20	7,434	8,260	9,237	9,591	10,851	12,443	28,412	31,410	34,170	35,020	37,566	39,997
21	8,034	8,897	9,915	10,283	11,591	13,240	29,615	32,671	35,479	36,343	38,932	41,401
22	8,643	9,542	10,600	10,982	12,338	14,041	30,813	33,924	36,781	37,659	40,289	42,796
23	9,260	10,196	11,293	11,689	13,091	14,848	32,007	35,172	38,076	38,968	41,638	44,181
24	9,886	10,856	11,992	12,401	13,848	15,659	33,196	36,415	39,364	40,270	42,980	45,559
25	10,520	11,524	12,697	13,120	14,611	16,473	34,382	37,652	40,646	41,566	44,314	46,928
26	11,160	12,198	13,409	13,844	15,379	17,292	35,563	38,885	41,923	42,856	45,642	48,290
27	11,808	12,879	14,125	14,573	16,151	18,114	36,741	40,113	43,195	44,140	46,963	49,645
28	12,461	13,565	14,847	15,308	16,928	18,939	37,916	41,337	44,461	45,419	48,278	50,993
29	13,121	14,256	15,574	16,047	17,708	19,768	39,087	42,557	45,722	46,693	49,588	52,336
30	13,787	14,953	16,306	16,791	18,493	20,599	40,256	43,773	46,979	47,962	50,892	53,672